Lógica Formal Proposicional

Regras de Inferência

Professor Mário Hozano

Na aula anterior...

Formalização de Argumento

Em lógica proposicional, os argumentos são expressos da seguinte forma:

$$\underbrace{\{<P1>, <P2>, \ldots , <Pn>\}}_{\textbf{Premissas}} \vdash <\text{Conclusão}>$$

Exemplo de Argumento

- *A proposta de auxílio está nos correios.*
- *Se os árbitros a receberem até sexta, eles a analisarão*
- *Portanto, eles a analisarão porque se a proposta estiver no correio, eles a receberão até sexta*

$$\{A,\ B \rightarrow C,\ A \rightarrow B\} \vdash C$$

Regras de Inferência

Modus Ponens (MP)

- Quando um fato é igual ao antecedente de uma implicação, pode-se inferir o consequente

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \\ \hline \beta \end{array}}$$

Modus Ponens (MP)

- Prove o argumento da proposta de auxílio

  $\{A, B \rightarrow C, A \rightarrow B\} \vdash C$

Modus Ponens (MP)

- Prove o argumento da proposta de auxílio

  $\{A, B \rightarrow C, A \rightarrow B\} \vdash C$

Resolução:

1. A (pemissa)
2. $B \rightarrow C$ (premissa)
3. $A \rightarrow B$ (premissa)

Modus Ponens (MP)

- Prove o argumento da proposta de auxílio

  $\{A, B \rightarrow C, A \rightarrow B\} \vdash C$

Resolução:

1. A (pemissa)
2. $B \rightarrow C$ (premissa)
3. $A \rightarrow B$ (premissa)
4. B (Aplicação de MP em 1 e 3)

Modus Ponens (MP)

- Prove o argumento da proposta de auxílio

  $\{A, B \rightarrow C, A \rightarrow B\} \vdash C$

Resolução:

1. A (pemissa)
2. $B \rightarrow C$ (premissa)
3. $A \rightarrow B$ (premissa)
4. B (Aplicação de MP em 1 e 3)
5. C (Aplicação de MP em 2 e 4 - Conclusão)

Eliminação da Negação (EN)

- Em uma *fbf* negada duas vezes, pode-se inferir a própria *fbf*

$$\boxed{\dfrac{\sim\sim\alpha}{\alpha}}$$

Introdução da Negação (IN)

- Analogamente à regra anterior, uma *fbf* pode ser inferida com negação dupla à própria *fbf*

$$\boxed{\dfrac{\alpha}{\sim\sim\alpha}}$$

Introdução da Conjunção (IC)

- A partir de duas *fbf'*s é possível inferir a conjunção das mesmas

$$\boxed{\dfrac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}}$$

Eliminação da Conjunção (EC)

- A partir de uma conjunção, pode-se inferir qualquer uma das partes

$$\boxed{\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}}$$

Eliminação da Conjunção (EC)

- Prove o argumento $\{(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge D), \sim\sim A, B\} \vdash D$

Resolução:

Eliminação da Conjunção (EC)

- Prove o argumento {(A ^ B)→(C ^ D), ~~A, B} ├ D

Resolução:

1. (A ^ B)→(C ^ D)	(premissa)
2. ~~A	(premissa)
3. B	(premissa)
4. A	(EN em 2)
5. A ^ B	(IC em 3 e 4)
6. C ^ D	(MP em 1 e 5)
7. D	(EC em 6 - conclusão)

Regras de Inferência (Continuação)

Introdução da Disjunção (ID)

- A partir de qualquer fórmula é possível inferir uma disjunção onde uma das partes é a fórmula original

$$\boxed{\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}}$$

Introdução da Disjunção (ID)

- Prove o argumento $\{A\} \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Resolução:

Introdução da Disjunção (ID)

- Prove o argumento {A} ├ (A v B) ^ (A v C)

Resolução:

1. A	(premissa)
2. A v B	(ID em 1)
3. A v C	(ID em 1)
4. (A v B) ^ (A v C)	(IC em 2 e 3)

Eliminação da Disjunção (ED)

- A partir de uma disjunção e de 2 condicionais, onde cada antecedente é uma das partes da disjunção e, com consequente em comum, pode-se inferir o consequente

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \alpha \rightarrow \lambda \qquad \beta \rightarrow \lambda}{\lambda}$$

Eliminação da Disjunção (ED)

- Prove o argumento $\{S \vee D, S \rightarrow F, D \rightarrow F\} \vdash F$

  Resolução:

Eliminação da Disjunção (ED)

- Prove o argumento $\{S \vee D, S \rightarrow F, D \rightarrow F\} \vdash F$

  Resolução:

  1. $S \vee D$ (premissa)
  2. $S \rightarrow F$ (premissa)
  3. $D \rightarrow F$ (premissa)
  4. F (ED em 1, 2 e 3)

Introdução do Bicondicional (IB)

- A partir de 2 condicionais onde o antecedente de um é o consequente do outro, e vice-versa, pode-se inferir uma bicondição envolvendo as 2 partes

$$\boxed{\dfrac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \leftrightarrow \beta}}$$

Introdução do Bicondicional (IB)

- Prove que $\{A \rightarrow B, (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)\} \vdash A \leftrightarrow B$

  Resolução:

Introdução do Bicondicional (IB)

- Prove que $\{A \rightarrow B, (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)\} \vdash A \leftrightarrow B$

Resolução:

1. $A \rightarrow B$	(premissa)
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	(premissa)
3. $B \rightarrow A$	(MP em 1,2)
4. $A \leftrightarrow B$	(IB em 1, 3)

Eliminação do Bicondicional (EB)

- A partir de 1 bicondicional é possível inferir 2 condições.

$$\boxed{\dfrac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\dfrac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \rightarrow \alpha}}$$

Eliminação do Bicondicional (EB)

- Prove o argumento $\{F \leftrightarrow (S \wedge D), S \wedge D\} \vdash F$

Resolução:

Eliminação do Bicondicional (EB)

- Prove o argumento $\{F \leftrightarrow (S \wedge D), S \wedge D\} \vdash F$

Resolução:

1. $F \leftrightarrow (S \wedge D)$	(premissa)
2. $S \wedge D$	(premissa)
3. $(S \wedge D) \rightarrow F$	(EB em 1)
4. F	(MP em 2, 3)

Silogismo Disjuntivo (SD)

- A partir de uma disjunção e a negação de 1 das partes pode-se inferir a outra parte

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \sim\alpha}{\beta}$$

Silogismo Disjuntivo (SD)

- Prove que $\{(A \vee B) \wedge (A \vee C), \sim A\} \vdash B \wedge C$

  Resolução:

Silogismo Disjuntivo (SD)

- Prove que {(A v B) ^ (A v C), ~A} ├ B ^ C

  Resolução:

  1. (A v B) ^ (A v C) (premissa)
  2. ~A (premissa)
  3. A v B (EC em 1)
  4. A v C (EC em 1)
  5. B (SD em 2, 3)
  6. C (SD em 2, 4)
  7. B ^ C (IC em 5, 6)

Modus Tollens (MT)

- A partir de um condicional e da negação do seu consequente, pode-se inferir a negação do antecedente

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \sim\beta}{\sim\alpha}$$

Modus Tollens (MT)

- Prove que $\{A \rightarrow B, \sim B \wedge C\} \vdash C \wedge \sim A$

  Resolução:

Modus Tollens (MT)

- Prove que $\{A \rightarrow B, \sim B \wedge C\} \vdash C \wedge \sim A$

  Resolução:

1. $A \rightarrow B$	(premissa)
2. $\sim B \wedge C$	(premissa)
3. $\sim B$	(EC em 2)
4. $\sim A$	(MT em 1, 3)
5. C	(EC em 2)
6. $C \wedge \sim A$	(IC em 5, 4)

$$
\begin{array}{r}
\bigcirc\ \square\ \triangle \\
+\ \bigcirc\ \square\ \triangle \\
\bigcirc\ \square\ \triangle \\
\hline
\triangle\ \triangle\ \triangle
\end{array}
$$

$\bigcirc = ?$

$\square = ?$

$\triangle = ?$

Upando seus fiéis
Pastor Nerd